

Проект Tube TransCalc

Вычисление индуктивности рассеяния
трансформатора с произвольным расположением
концентрических секций

Предисловие

В данной статье рассматривается вопрос о вычислении индуктивности рассеяния трансформатора с произвольным расположением концентрических (слоевых) секций. Имеющаяся классическая формула способна дать относительно точный результат только при соблюдении весьма жестких конструктивных ограничений. При отходе от этих ограничений, что имеет место в реальных конструкциях, приходится считать, что отклонения от них незначительно изменяют индуктивность рассеяния. Не имея другого способа расчета, мы вынуждены этому верить, однако сомнения остаются. Здесь предпринята попытка убрать наиболее досадные ограничения, чтобы получить результат с большей степенью достоверности для более широкого диапазона конструктивных решений.

Причиной, побудившей автора заняться проблемами трансформаторов, поначалу было желание рассчитать и намотать выходной трансформатор однотактного усилителя. Поиск на руинах ламповой цивилизации подходящих ламп и трансформаторного железа привел к перебору вариантов схем усилителя, пересчету параметров выходного каскада и, в итоге, к необходимости неоднократных пересчетов выходного трансформатора. Процедура расчета трансформатора по множеству формул предполагает, по крайней мере, их сосредоточение в пределах легко обозримого документа, чего нельзя сказать в отношении теоретических источников. Но, как оказалось, это еще не все. Попытка расчетов на калькуляторе показала – палец часто нажимает не то, что нужно, следовательно, таким путем трудно получить результат с большой степенью достоверности, в особенности при желании иметь комплект завершенных расчетов для последующего их сравнения. И тут автор вспомнил, что он к тому же еще и программист. В итоге возникла идея создания Windows-приложения Tube TransCalc, позволяющего осуществить расчет параметров, которым должен удовлетворять трансформатор по условиям его применения (однотактный или двухтактный, с подмагничиванием или без него, и т.д.), а также расчет параметров, которые будет иметь трансформатор, имеющий какие-то конструктивные данные. Сейчас, когда пишутся эти строки, приложение Tube TransCalc напоминает скорее законченное изделие, чем идею его создания.

Список литературы

- Г.С. Цыкин [Трансформаторы низкой частоты](#), Связьиздат, 1955
- Г.С. Цыкин [Усилители электрических сигналов](#) М., Энергия, 1969
- Г.В. Войшвилло [Усилители низкой частоты](#). Связьиздат, 1939
- Г.В. Войшвилло [Руководство по проектированию усилителей низкой частоты](#). Ленинград, 1958
- [Расчет индуктивности рассеяния трансформаторов](#)

1. Замечания по поводу индуктивности рассеяния

Что такое индуктивность рассеяния, и какое значение она имеет при проектировании трансформатора? Расхожее мнение, повторяемое в разных околотрансформаторных публикациях, следующее: “Чем меньше – тем лучше”. А так ли это на самом деле? По всей видимости, почвой для утверждения такого мнения послужило господство методики расчета трансформатора для случая активной нагрузки. Действительно – при активной нагрузке индуктивность рассеяния является причиной спада АЧХ на высших частотах диапазона. Но являются ли активными нагрузки, для которых мы проектируем свои трансформаторы? Давайте посмотрим, что на сей счет пишет Г.С. Цыкин:

“Под сокращенным названием трансформаторов с активной нагрузкой понимают трансформаторы с активной нагрузкой, работающие от источника сигнала с активным сопротивлением и э.д.с., постоянной в рабочей полосе частот. Несмотря на то, что всякий источник сигнала и всякая нагрузка кроме активной составляющей сопротивления имеют также и реактивную составляющую, сопротивление источника и нагрузки можно считать активным, если во всей полосе рабочих частот реактивная составляющая значительно меньше активной.

К этой группе относятся следующие трансформаторы, имеющие большое практическое применение:

а) входные трансформаторы, сильно нагруженные со стороны вторичной обмотки активным сопротивлением, и работающие от угольного или электродинамического микрофона, резистивного датчика, удлинителья скорректированной линии связи и других источников, сопротивление которых можно считать активным в рабочей полосе частот, а э.д.с. не зависящей от частоты;

б) промежуточные трансформаторы, сильно нагруженные активным сопротивлением на вторичной обмотке;

в) выходные трансформаторы, работающие на измерительный, пишущий, регистрирующий или преобразующий прибор с практически активным сопротивлением в рабочей полосе частот, удлинитель, скорректированную линию связи, электрический фильтр с активным входным сопротивлением;

г) выходные трансформаторы, работающие на нагрузку, род которой может изменяться в широких пределах. Примером является выходной трансформатор лабораторного генератора звуковой частоты или лабораторного усилителя, а также выходной трансформатор усилителя проводного вещания; в этих случаях нагрузку трансформатора приходится считать чисто активной, так как величина реактивной составляющей нагрузки может колебаться в широких пределах и даже менять знак.”

Если в этой классификации входные и межкаскадные трансформаторы видны совершенно определенно, то по поводу выходных трансформаторов, работающих на многополосную акустическую систему, видно лишь то, что их “... приходится считать ...”. С другой стороны, в отношении трансформаторов с индуктивной нагрузкой Г.С. Цыкин пишет следующее:

“Под сокращенным названием трансформаторов с индуктивной нагрузкой здесь понимаются трансформаторы с нагрузкой, представляющей собой последовательное соединение активного сопротивления и индуктивности, работающие от источника сигнала с активным сопротивлением и э.д.с., постоянной в рабочей полосе частот. К таким трансформаторам относятся выходные трансформаторы оконечных ступеней электронных усилителей, работающие на электродинамические громкоговорители, электродинамические пишущие головки и другие виды нагрузки, имеющие в области высших рабочих частот значительную индуктивную составляющую сопротивления.”

В этой классификации совершенно определенно видны выходные трансформаторы, работающие на однополосную АС или головные телефоны. Таким образом, в отношении как однополосных, так и многополосных АС, вывод об использовании в каждом конкретном случае выходного трансформатора с

активной или индуктивной нагрузкой может быть сделан только на основе анализа характера их сопротивления и частотной характеристики. (Эта проблема выходит за границы поставленной здесь задачи.)

Различие между трансформатором с активной нагрузкой, и трансформатором с индуктивной нагрузкой, состоит в том, что при их проектировании применяются разные принципы. В отношении индуктивности рассеяния первого действует принцип “чем меньше – тем лучше”, а в отношении трансформатора с индуктивной нагрузкой, следующий: величина индуктивности рассеяния должна быть такой, чтобы спадом АЧХ, вызванным индуктивностью рассеяния, скомпенсировать подъем АЧХ, создаваемый индуктивной составляющей в сопротивлении нагрузки. При индуктивной нагрузке возможны также варианты реализации заданного подъема или спада АЧХ на верхних частотах (этаким трансформатор-эквалайзер). Расчет необходимой индуктивности рассеяния ни в том, ни в другом случае не вызывает затруднений. Проблемы начинаются тогда, когда мы пытаемся определить величину индуктивности рассеяния по конструктивным (на этапе расчета по предполагаемым конструктивным) данным обмоток, чтобы оценить, устроит ли нас такой трансформатор. Способы подсчета этой величины довольно утомительны, а в большинстве случаев просто отсутствуют. Следовательно, нужно иметь эффективный способ подсчета, применимый для любого конструктивно оправданного расположения частей обмоток в катушке. Стоит ли овчинка выделки? А давайте зададим вопрос: может быть туманные слухи о таинственных приемах фирмы Audio Note при проектировании усилителя под конкретную АС, как раз и связаны с более внимательным отношением инженеров этой фирмы к индуктивности рассеяния?

Рассмотрим положение вещей в деле расчета индуктивности рассеяния по источникам середины прошлого века. Для случая активной нагрузки в наличии имеется фактически единственный способ уменьшения индуктивности рассеяния ниже заданного предела – разбиение обмоток на части и чередование полученных частей (секционирование обмоток) с общим нечетным числом концентрических секций, причем с соблюдением определенного соотношения между толщиной крайних и внутренних секций. Процедура достижения расчетной величины состоит в том, что задается какое-то разбиение и подсчитывается индуктивность рассеяния. Если ее величина меньше расчетной – все в порядке, если нет – обмотки разбиваются на большее количество частей с соблюдением того же принципа разбиения, снова производится расчет и т.д. Одним словом, метод научного тыка. С точки зрения утомительности расчетов, единственное, что здесь радует – это наличие простой аналитической зависимости (формулы), позволяющей обойтись относительно небольшим количеством нажатий на кнопки калькулятора. Когда же речь заходит о получении конкретной величины индуктивности рассеяния (индуктивная нагрузка), способы решения проблемы начинают выглядеть скорее искусством, чем наукой. Отсутствие методики для подсчета индуктивности рассеяния произвольной конфигурации концентрических секций заменяется принципом: “возьмем хорошее разбиение и сделаем его хуже настолько, чтобы результат нас устроил”. Все было бы хорошо, но предлагаемый принцип действует только в случае, если “хорошее” разбиение представляет собой всего три концентрические секции – две крайние для одной обмотки и одна между ними для другой обмотки. Тогда путем перераспределения количества витков между крайними секциями можно добиться теоретически любого промежуточного значения индуктивности рассеяния между самым плохим из всех возможных (две никак не разбитые обмотки) и самым плохим из всех хороших (одна обмотка посередине и равные половинки другой обмотки по краям). А как быть, если нужно получить значение, лежащее между хорошими результатами разбиений на 9 и 11 секций? У Г.С. Цыкина, по крайней мере, прямого ответа на такой вопрос нет. И дело здесь не в том, что Г.С. Цыкин и другие столпы трансформаторной науки так и не смогли найти способ подсчета индуктивности рассеяния для произвольной конфигурации обмоток. Индуктивность рассеяния равна частному от деления потока индукции поля рассеяния на ток в обмотке:

$$L_s = \frac{\Phi_p}{i}.$$

Ток i – величина постоянная. Вся проблема в величине Φ_p – это интегральная величина. Но в каждом конкретном случае ее можно найти путем банального численного интегрирования. Приемы численного интегрирования были изобретены задолго до изобретения трансформатора. Одна беда – нужно много и долго считать. Поэтому наши героические предки приложили много усилий, чтобы дать всем, у кого нет компьютера (а таких в то время было большинство) набор формул, позволяющий пусть не для всех случаев и пусть не совсем точно, но все же подсчитать параметры трансформатора. Вместе с тем упомянутый выше способ вычисления промежуточного значения индуктивности рассеяния мог появиться только при использовании методов, близких к численному интегрированию. Откуда иначе мог взяться график,

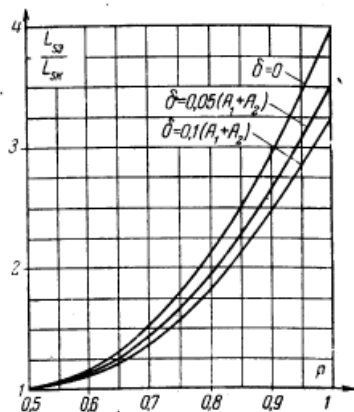


Рис. XV.36. График, определяющий увеличение индуктивности рассеяния при разделении одной из обмоток на две неравные части

отражающий зависимость между процентным соотношением количества витков в крайних концентрических секциях и коэффициентом изменения индуктивности рассеяния? Да все оттуда же: идея численного интегрирования упорно прорастала сквозь бетон аналитических зависимостей. Резюме Цыкина и его соратников в то время могло быть таким: “Мы бы рады дать вам надежный способ, да только у вас все равно не хватит терпения все это сосчитать”... В итоге мы имеем тот же метод научного тыка, но уже в условиях крайне ограниченной стратегии его применения.

Итак, мы не имеем аналитической зависимости, дающей разбиение обмоток на части и их расположение в катушке, и гарантирующей при этом получение требуемых значений параметров трансформатора. Поэтому до счастливого момента, когда такая зависимость будет открыта, мы обречены на подбор приемлемой индуктивности рассеяния путем перебора вариантов разбиения и размещения. Количество вариантов можно сильно сократить, руководствуясь здравым смыслом и рекомендациями тех, кто занимался этим долго и всерьез (Г.С. Цыкин и др.). Нам же остается, используя приемы численного интегрирования, получить алгоритм расчета индуктивности рассеяния и переложить вычислительную часть проблемы на компьютер.

2. Математическая модель потока рассеяния

2.1. Предварительные рассуждения

Потери энергии в трансформаторе имеют две причины: потери на преодоление активного сопротивления проводов обмоток и потери в магнитном поле. Магнитное поле существует как в сердечнике трансформатора – для линий магнитной индукции, которые прошли через сердечник, так и за его пределами – для линий магнитной индукции, которые не прошли через сердечник (а прошли через пространство, занятое обмотками, межслоевыми и межсекционными прокладками, воздушное пространство и металлические детали трансформатора, расположенные вокруг катушки). Для трансформаторов малой мощности, каковыми являются трансформаторы низкой частоты, потери в сердечнике принято считать нулевыми. Для таких трансформаторов рассматриваются активные потери в проводах и электромагнитные потери за пределами сердечника, которые называют “рассеянием”. Отсюда два критерия оценки этих потерь – коэффициент полезного действия трансформатора (КПД) и величина индуктивности рассеяния. КПД трансформатора наиболее точно оценивает его эффективность в области низких частот, а индуктивность рассеяния влияет на эффективность трансформатора при росте частоты и никак не связана с КПД. Поэтому при выводе зависимости между геометрическими соотношениями частей обмоток и индуктивностью рассеяния во всех других отношениях трансформатор принято считать идеальным.

Выражение доли потерь электромагнитной энергии в трансформаторе через индуктивность рассеяния не является единственно возможной формой представления этих потерь. В разделе электротехники, посвященном проблемам обычной передачи электроэнергии, они выражаются в виде напряжения рассеяния – т.е. в виде коэффициента падения напряжения во вторичной обмотке. Нам такой подход не устраивает, т.к. в отличие от электротехники, имеющей дело с одной частотой переменного тока (50, 60 или 400 Гц), мы имеем дело с диапазоном частот, где влияние потерь для разных частот различно. Это влияние оценивается при помощи эквивалентной схемы трансформатора, в которой все свойства трансформатора (в том числе и индуктивность рассеяния) представлены в виде набора идеальных объектов.

На [рис. 1](#) изображен трансформатор в разрезе. Имеются две секционированные обмотки – всего 5 секций. Одна обмотка имеет синий цвет, другая – красный.

Какая из них первичная, а какая вторичная – для рассмотрения данного вопроса не имеет никакого значения. Поэтому во избежание ложных ассоциаций, которые могут повлечь за собой слова “первичная” и “вторичная”, до некоторого момента они будут называться “синяя” и “красная”.

В правой части катушки эллиптическими кривыми условно показаны линии магнитной индукции, окружающие секции обмоток. В центрах секций условными значками показаны направления токов, протекающих через секции. (См. “правило буравчика”.)

Между токами и соответствующими линиями имеется связь – то ли токи порождают магнитное поле, то ли магнитное поле порождает токи – с какой стороны посмотреть. Это тоже здесь не важно – нас не интересует причинно-следственная связь между разными сторонами одного явления; мы рассматриваем явление “как есть” и пытаемся вычислить индуктивность – количественную характеристику, которая является связующим звеном между переменным магнитным полем и токами в обмотках.

В левой части катушки обозначены:

- h – высота катушки (она одинакова для синей и красной обмоток);
- $[a, b]$ – отрезок, длина которого равна полной толщине обмоток;
- δ – промежуток между секциями;

C_1, C_2, C_3 – секции синей обмотки;
 K_1, K_2 – секции красной обмотки.

Обозначим:

w_c – количество витков синей обмотки;
 w_k – количество витков красной обмотки;
 i_c – ток в синей обмотке;
 i_k – ток в красной обмотке.

Рассмотрим распределение магнитных полей в катушке по горизонтали при движении сквозь витки обмоток слева направо. В точке a напряженность \vec{H} магнитного поля равна нулю, т.к. левее этой точки нет ни одного витка, который мог бы его создать (мы рассматриваем часть замкнутой магнитной линии, которая расположена справа от проводника, по которому течет ток – вернее отрезок, проходящий внутри соленоида). При смещении точки, которую назовем x , вправо от точки a , из-за увеличения количества витков, остающихся левее точки x , сначала будет возрастать напряженность поля, вызванного синей обмоткой, а затем появится магнитное поле красной обмотки. Векторы напряженности этих полей противоположны, т.к. противоположны токи, протекающие по обмоткам. Начиная с точки b , и правее нее начинает выполняться условие $w_c i_c + w_k i_k = 0$ – поэтому поля обмоток взаимно компенсируются и можно считать, что их там нет. Синяя и красная диаграммы в разрезе катушки показывают распределение напряженности \vec{H} , созданной полями синей и красной обмоток. Если предположить, что магнитные поля обмоток никак не взаимодействуют, и найти поток магнитной индукции Φ каждой обмотки, а затем потокосцепление $\Psi = w\Phi$, то по его значению можно найти индуктивность рассеяния отдельно взятой обмотки:

$$L_{sc} = \frac{\Psi_c}{i_c} \text{ – для синей обмотки;}$$

$$L_{sk} = \frac{\Psi_k}{i_k} \text{ – для красной обмотки.}$$

Однако результирующая индуктивность рассеяния не будет равна простой сумме индуктивностей обмоток, найденных таким способом, так как при взаимодействии магнитных полей рассеяния обмоток результирующий поток рассеяния не равен сумме потоков, взятых по всему промежутку $[a, b]$. Этот поток образуется в каждой точке промежутка результирующими векторами напряженности, равными сумме векторов напряженности исходных полей. Взаимодействие полей обмоток приводит к тому, что результирующий поток рассеяния становится меньше каждого отдельно взятого потока. Кроме того, в выражении для потокосцепления $\Psi = w\Phi$ от координаты x зависят оба сомножителя – w и Φ . Таким образом искомая индуктивность рассеяния должна соответствовать результирующему потокосцеплению, найденному с учетом направлений векторов напряженности, зависимости $H(x)$ и зависимости $w(x)$.

Рассмотрим распределение магнитных полей по вертикали. Взаимодействие исходных потоков обмоток происходит в катушке на промежутке длины h , который равен высоте катушки, а также за его пределами. За пределами катушки магнитные линии отдаляются друг от друга, плотность магнитных полей падает, и их взаимодействие резко уменьшается. Поэтому принято считать, что результирующее магнитное поле сосредоточено на отрезке пути, длина которого равна h . На этом промежутке линии магнитного поля считаются строго вертикальными.

2.2. Промежутки интегрирования

В общем случае $\Psi = \int_S w B dS$, где $B = \mu_0 H$ – магнитная индукция, а S – площадь обмоток в сечении трансформатора, перпендикулярном оси сердечника. Если предположить, что материал обмоток вместе

с изоляцией во всех точках катушки имеет одинаковую толщину ([рис. 4](#)), то эту площадь можно выразить как функцию толщины обмоток и производить интегрирование по одной переменной.

Напряженность поля внутри соленоида выражается так: $H = \frac{iw}{h}$ (в системе СИ). Поэтому на каждом промежутке магнитная индукция, созданная частью витков каждой обмотки, либо постоянна (межсекционные промежутки), либо растет пропорционально увеличению числа витков слева от точки x – т.е. изменяется по линейному закону. Следовательно, суммарная индукция, создающая поток рассеяния, также либо постоянна, либо изменяется по линейному закону. Геометрическая интерпретация потока рассеяния состоит в том, что в плоской фигуре бесконечно малой толщины, которая совпадает с плоскостью рисунка, он соответствует площади фигуры, которая на [рис. 1](#) обозначена как “Результирующий поток 1”. Увеличение площади этой фигуры при движении слева направо происходит путем добавления площадей прямоугольников, треугольников, либо того и другого. Высоты этих прямоугольников или треугольников на каждом промежутке определяются длиной суммарного вектора индукции в крайних точках промежутка. Равенство нулю вектора индукции потока рассеяния в точке a обеспечивается отсутствием витков левее этой точки, а в точке b – условием $w_c i_c + w_k i_k = 0$.

Рассмотрим крайние точки отрезка $[a, b]$ как претенденты на роль начала системы координат. Точка b хороша тем, что она всегда остается на месте в отличие от точки a , положение которой зависит от количества намотанных проводов. Поэтому точка b – лучший кандидат на роль точки отсчета. Из рисунка видно, что “Результирующий поток 2” имеет такую же площадь, что и “Результирующий поток 1”. Если отвлечься от физического смысла явления, то “Результирующий поток 2” может быть получен применением такой же процедуры подсчета напряженности полей, только при движении по отрезку $[a, b]$ справа налево (строгий вывод равенства площадей следует из того, что если для некоторой функции

$f(x)$ на промежутке $[a, b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$). Это

дает право совместить начало оси Ox с поверхностью катушки и двигаться через обмотки в направлении, соответствующем порядку их намотки. Для определенности со знаками, перед началом процедуры первую от внутреннего края катушки обмотку назовем синей, и будем считать направление тока в ней положительным, а в красной обмотке – отрицательным. Полный промежуток, на котором подсчитывается поток рассеяния, обозначим $[0, b]$ ([рис. 4](#)).

В общем случае в катушке кроме изоляции между секциями (межсекционные промежутки) может быть также изоляция между слоями внутри секции ([рис. 2](#)) – межслоевые промежутки. Это обстоятельство не вносит никаких принципиальных изменений в процедуру подсчета потока рассеяния – остаются те же прямоугольники и треугольники, только их теперь становится больше. Таким образом, есть два вида промежутков, для которых нужно последовательно подсчитывать прирост потока рассеяния – межслоевые и межсекционные промежутки, где напряженность поля постоянна, и промежутки длиной в толщину слоя с проводами, где напряженность поля изменяется по линейному закону.

В результате сложения потоков обмоток результирующий поток может менять свой знак. Более того – трансформатор, который должен обеспечить минимальную индуктивность рассеяния, как раз и должен содержать как можно больше точек перемены знака магнитного поля, так как именно это является свидетельством малой протяженности участков роста напряженности. Изменение знака возможно в точках, где результирующая напряженность H становится равной нулю. Такая точка может появиться только там, где изменяется значение H – т.е. на промежутке, занятом слоем обмотки. Если точка находится внутри, изменение знака происходит. Если она совпадает с началом или концом промежутка – не происходит (на данном промежутке). Следовательно перед расчетом прироста потока рассеяния на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, занятом слоем обмотки, нужно сначала найти значения суммарной напряженности поля на концах этого промежутка: H'_i и H''_i и получить их произведение. Если оно отрицательно – то изменение знака напряженности имеет место. Ситуация изменения знака показана на [рис. 3](#). Треугольники $x_i H'_i \chi$ и $x_{i+1} H''_i \chi$ подобны, поэтому

$$\frac{\chi - x_i}{x_{i+1} - \chi} = \frac{|H'_i|}{|H''_i|},$$

$$\chi = \frac{|H'_i|x_{i+1} + |H''_i|x_i}{|H'_i| + |H''_i|}. \quad (1)$$

После отыскания точки χ прирост потока рассеяния подсчитывается последовательно на промежутках $[x_i, \chi]$ и $[\chi, x_{i+1}]$.

2.3. Дифференциал площади

В выражении $\Psi = \int_S wBdS$ дифференциал dS есть элементарное приращение площади поверхности, пересеканной потоком магнитной индукции, векторы которого перпендикулярны этой поверхности. В данном случае поверхность является частью плоскости (рис. 4). Приращение площади dS зависит от координаты x , относительно которой происходит элементарное перемещение dx . Площадка $dS(x)$ ограничивает с одной стороны объемную фигуру, которую можно назвать элементарным слоем независимо от того, что это такое – часть слоя обмотки, межслоевого или межсекционного промежутка. Площадка $dS(x)$ ограничена линиями $l(x)$ и $l(x + dx)$. Такая линия соответствует витку бесконечно тонкого провода, поэтому будем называть ее идеальным витком. Площадь сечения элементарного слоя:

$$dS(x) = S(x + dx) - S(x) = [2V_1(x + dx) + 2V_2(x + dx) + \pi(x + dx)^2] - [2V_1x + 2V_2x + \pi x^2] =$$

$$= [2V_1 + 2V_2]dx + 2\pi x dx + \pi dx^2 = (l_0 + 2\pi x)dx.$$

Символом l_0 обозначена наименьшая длина идеального витка $2V_1 + 2V_2$ (см. катушка). Член πdx^2 отброшен, так как он является бесконечно малой величиной второго порядка.

Длина идеального витка, проведенного через точку x , имеет следующее выражение: $l(x) = l_0 + 2\pi x$. Тогда

$$dS(x) = l(x)dx.$$

Площадь слоя, ограниченного идеальными витками, проходящими через точки x_i и x_{i+1} :

$$S(x_i, \Delta_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} dS(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (l_0 + 2\pi x)dx = (l_0 x + \pi x^2) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = l_0(x_{i+1} - x_i) + \pi(x_{i+1}^2 - x_i^2) =$$

$$= [l_0 + \pi(x_{i+1} + x_i)](x_{i+1} - x_i) = [l_0 + \pi(2x_i + \Delta_i)]\Delta_i = \pi\Delta_i^2 + l(x_i)\Delta_i,$$

где Δ_i – длина отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ (толщина слоя).

2.4. Ток и число витков в слое обмотки

Известный из классических источников (Цыкин, Войшвилло и т.д.) упрощенный вывод формулы индуктивности рассеяния основан на предположении о том, что плотность ампервитков каждой из обмоток одинакова для всех промежутков, содержащих витки данной обмотки. Такое возможно только при выполнении условий:

- Все слои данной обмотки имеют равное количество витков;
- Токи, протекающие через слои данной обмотки, равны между собой.

- Провод обмотки равномерно рассредоточен по всему объему, занимаемому секцией, наличие межслоевой изоляции и, собственно, изоляции провода, в расчет не принимается.

Эти условия теоретически могут быть выполнены только для простой обмотки с равным количеством витков в слоях. В сложных обмотках за счет разной длины витка и наличия параллельных ветвей разные слои в общем случае будут иметь разное сопротивление, и поэтому через них будут протекать разные токи. Кроме того, если разные слои имеют разное количество витков, они будут иметь разное количество ампервитков. Следовательно, для решения задачи подсчета индуктивности рассеяния обмоток при минимальных конструктивных ограничениях, нужно перейти от средней плотности витков и ампервитков к их плотности для каждого слоя обмотки. Также нужно учитывать, что вывод об индуктивности рассеяния трансформатора при разных способах размещения и соединения половинок обмоток удобнее делать на основании индуктивности рассеяния одной катушки трансформатора. Рассмотрим одну обмотку. Обозначим:

W – количество физических витков обмотки в одной цилиндрической секции;

w – количество витков обмотки в одной цилиндрической секции, учитываемых при создании индукции;

v_i – количество витков в слое i (это число одинаково для всех слоев сложной обмотки);

i – ток, протекающий через обмотку в цилиндрической секции (это значение одинаково для всех слоев простой обмотки);

i_p – ток, протекающий через группу p ;

i_{pq} – ток, протекающий через слой q группы p ;

r – сопротивление обмотки в цилиндрической секции;

r_p – сопротивление группы p ;

r_{pq} – сопротивление слоя q группы p ;

Δ_i – толщина слоя i ;

P – количество групп сложной обмотки;

Q – количество слоев в одной группе сложной обмотки.

Тогда для безымянной обмотки:

$w = W$ – в случае простой обмотки;

$w = \frac{W}{Q}$ – при последовательном соединении групп;

$w = \frac{W}{P}$ – при параллельном соединении групп.

Токи в слоях

В последовательно соединенных группах через каждую группу течет одинаковый ток $i_p = i$. Так как слои в группе соединены параллельно, то напряжения на концах слоев этой группы равны между собой:

$$i \cdot r_p = i_{p1} \cdot r_{p1} = i_{p2} \cdot r_{p2} = \dots = i_{pQ} \cdot r_{pQ}.$$

Тогда через каждый слой q группы p течет ток $i_{pq} = i \cdot \alpha_{pq}$, где $\alpha_{pq} = \frac{r_p}{r_{pq}}$.

В параллельно соединенных группах через каждую группу течет ток $i_p = i \cdot \alpha_p$, где $\alpha_p = \frac{r}{r_p}$. Так как

слои в группе соединены последовательно, то через них текут равные токи $i_{pq} = i \cdot \alpha_{pq}$, где $\alpha_{pq} = \frac{r}{r_{pq}}$.

В простой обмотке токи во всех слоях одинаковы и равны i .

При подсчете индуктивности рассеяния вычисления производятся для слоев обмоток и слоев изоляции в порядке их расположения, начиная от катушки. Для того, чтобы пользоваться полученными формулами, нужно иметь таблицу соответствия между последовательными номерами слоев катушки i (включая слой изоляции) и индексами p и q . При наличии такой таблицы токи в слоях безымянной обмотки во всех случаях выражаются так:

$$i_i = i \cdot \alpha_i \quad \text{— ток в слое } i \text{ катушки, где:}$$

$$\alpha_i = 0 \quad \text{— для слоя изоляции;}$$

$$\alpha_i = 1 \quad \text{— для простой обмотки;}$$

$$\alpha_i = \frac{r_p}{r_{pq}} \quad \text{— для последовательно соединенных групп;}$$

$$\alpha_i = \frac{r}{r_{pq}} \quad \text{— для параллельно соединенных групп.}$$

Число витков в слое

В сложных обмотках слои содержат равное количество витков: $v_i = \frac{W}{PQ}$. Тогда при сквозной индексации слоев выражения для числа витков в слое безымянной обмотки будут такими:

$$v_i = w\beta_i \quad \text{— число витков в слое } i \text{ катушки, где:}$$

$$\beta_i = 0 \quad \text{— для слоя изоляции;}$$

$$\beta_i = \frac{v_i}{w} \quad \text{— для простой обмотки;}$$

$$\beta_i = \frac{1}{PQ} \quad \text{— для сложной обмотки.}$$

Деление слоя на части

Точка изменения знака, найденная по формуле (1), должна привести к геометрическому делению слоя с проводом на две части. Так как напряженность магнитного поля вычисляется по формуле $H = \frac{iw}{h}$, в которую входит и ток и число витков, то для сохранения общего числа ампервитков обмотки, число ампервитков данного слоя также должно быть поделено между двумя слоями. Будем считать, что токи в новых слоях такие же, что в исходном слое, а витки делятся в полученной пропорции:

$$\beta_i' = \frac{\Delta_i'}{\Delta_i} \beta_i, \quad \beta_i'' = \frac{\Delta_i''}{\Delta_i} \beta_i, \quad \text{где } \Delta_i' \text{ и } \Delta_i'' \text{ — толщина новых слоев.}$$

2.5. Приведение обмоток

Индуктивность рассеяния системы из двух обмоток может быть вычислена, только если токи и количество витков в них выражены в соизмеримых величинах. В теории трансформаторов используется так называемая операция приведения, когда параметры, связанные с одной обмоткой, выражаются через одноименные параметры, связанные с другой обмоткой при помощи коэффициента трансформации. Основанием для операции приведения служит фундаментальное соотношение $w_c i_c + w_k i_k = 0$. В данном случае использование коэффициента трансформации не даст желаемого результата, так как в формуле напряженности $H = \frac{iw}{h}$ такие взаимообратные величины как ток и число витков соединены операцией

умножения. Поэтому операция приведения здесь будет выполнена в буквальном смысле — мы будем считать, что вторичная обмотка содержит такое же число витков, что и первичная, и через нее протекает

ток такой же величины, но противоположно направленный. Далее одна точка над символом будет обозначать его принадлежность к первичной обмотке, а две точки – к вторичной:

$$\dot{w}i = -\dot{w}\ddot{i} \quad \Rightarrow \quad \dot{w} = \dot{w}, \quad \ddot{i} = -\dot{i}.$$

Величина индуктивности рассеяния, полученная на основании такого соглашения, будет индуктивностью рассеяния, приведенной к первичной обмотке.

2.6. Плотность ампервитков в элементарном слое обмотки

$$\dot{i}_i = \dot{i}\dot{\alpha}_i, \quad \ddot{i}_i = \ddot{i}\dot{\alpha}_i = -\dot{i}\ddot{\alpha}_i, \quad i_i = \dot{i} + \ddot{i} = \dot{i}(\dot{\alpha}_i - \ddot{\alpha}_i) \quad \text{– ток в слое.}$$

$$\dot{w}_i = \dot{w}\dot{\beta}_i, \quad \ddot{w}_i = \ddot{w}\dot{\beta}_i = \dot{w}\ddot{\beta}_i, \quad w_i = \dot{w}(\dot{\beta}_i + \ddot{\beta}_i) \quad \text{– число витков в слое.}$$

$$\frac{(\dot{\alpha}_i - \ddot{\alpha}_i)(\dot{\beta}_i + \ddot{\beta}_i)}{\Delta_i} \quad \text{– плотность ампервитков в слое.}$$

Коэффициенты α_i и β_i равны нулю на промежутках, где нет витков данной обмотки, поэтому полученное выражение является обобщенным представлением плотности ампервитков для произвольного слоя, в том числе и для слоя изоляции.

2.7. Результирующая напряженность и число ампервитков в слое

При движении в направлении оси Ox :

$$H_i(x) = \frac{i\dot{w}}{h} \left[H'_i + \frac{(\dot{\alpha}_i - \ddot{\alpha}_i)(\dot{\beta}_i + \ddot{\beta}_i)}{\Delta_i} (x - x_i) \right], \quad \text{где} \quad (2)$$

$H'_i = \sum_{k=1}^{i-1} (\dot{\alpha}_k - \ddot{\alpha}_k)(\dot{\beta}_k + \ddot{\beta}_k)$ – напряженность поля в начале слоя i , созданная предшествующими витками обеих обмоток;

$H''_i = H'_i + (\dot{\alpha}_i - \ddot{\alpha}_i)(\dot{\beta}_i + \ddot{\beta}_i)$ – напряженность поля в конце слоя i .

Это также обобщенная формула напряженности для любого слоя обмотки.

Ток, протекающий через вторичную обмотку, направлен противоположно току первичной обмотки, поэтому коэффициент $\ddot{\alpha}_i$, отвечающий за долю полного тока в слое вторичной обмотки, взят с противоположным знаком.

Для вычисления потокосцепления обмоток нужно иметь произведение напряженности и числа витков, которыми эта напряженность была создана. В ситуации со сложными обмотками вопрос о числе витков не так очевиден, как в традиционном случае. Здесь нельзя брать за основу простое число физических витков, так как разные токи в слоях с одинаковым числом витков порождают разную напряженность магнитного поля. А произвольное чередование слоев разных обмоток и вовсе делает ситуацию неоднозначной. Основой правильного решения проблемы как раз служит только что полученная формула: если

$H = \frac{iw}{h}$, то $w = \frac{h}{i}H$, следовательно

$$W_i(x) = \frac{h}{\dot{i}} \left[H'_i + \frac{(\dot{\alpha}_i - \ddot{\alpha}_i)(\dot{\beta}_i + \ddot{\beta}_i)}{\Delta_i} (x - x_i) \right] \quad (3)$$

– число витков, создающее результирующую напряженность магнитного поля в данной точке промежутка. Это также обобщенная формула числа витков для любого слоя обмотки.

2.8. Индуктивность рассеяния

Формулы (2) и (3) легко разделяются на частные случаи для слоя первичной обмотки, слоя вторичной обмотки и слоя изоляции. Это разделение принципиальным не является и далее применяется исключительно с целью уменьшения громоздкости результирующих формул.

Первичная обмотка

Напряженность магнитного поля и число витков

$$\dot{H}_i(x) = \frac{i\dot{W}}{h} \left[H'_i + \frac{\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i}{\Delta_i} (x - x_i) \right];$$

$$\dot{W}_i(x) = \dot{w} \left[H'_i + \frac{\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i}{\Delta_i} (x - x_i) \right].$$

Потокоцепление

$$\dot{\Psi} = \frac{\mu_0 i \dot{W}^2}{h} \sum_{i=1}^N \dot{\Gamma}_i,$$

$$\text{где } \dot{\Gamma}_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[H'_i + \frac{\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i}{\Delta_i} (x - x_i) \right]^2 (l_0 + 2\pi x) dx =$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\dot{A}_i^2 (x - x_i)^2 + 2\dot{A}_i H'_i (x - x_i) + H_i'^2 \right] (l_0 + 2\pi x) dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = x - x_i, \quad dt = dx, \quad \Delta_i = x_{i+1} - x_i, \\ l_0 + 2\pi x = (l_0 + 2\pi x_i) + 2\pi x (x - x_i) = l_i + 2\pi t \end{array} \right] =$$

$$= \int_0^{\Delta_i} (\dot{A}_i^2 t^2 + 2\dot{A}_i H'_i t + H_i'^2) (l_i + 2\pi t) dt =$$

$$= \int_0^{\Delta_i} \left[l_i (\dot{A}_i^2 t^2 + 2\dot{A}_i H'_i t + H_i'^2) + 2\pi (\dot{A}_i^2 t^3 + 2\dot{A}_i H'_i t^2 + H_i'^2 t) \right] dt =$$

$$= l_i \left(\frac{\dot{A}_i^2}{3} \Delta_i^3 + \dot{A}_i H'_i \Delta_i^2 + H_i'^2 \Delta_i \right) + 2\pi \left(\frac{\dot{A}_i^2}{4} \Delta_i^4 + \frac{2\dot{A}_i H'_i}{3} \Delta_i^3 + \frac{H_i'^2}{2} \Delta_i^2 \right),$$

$$\dot{A}_i = \frac{\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i}{\Delta_i}.$$

Вторичная обмотка

Напряженность магнитного поля и число витков

$$\ddot{H}_i(x) = \frac{i\ddot{W}}{h} \left[H'_i - \frac{\ddot{\alpha}_i \ddot{\beta}_i}{\Delta_i} (x - x_i) \right];$$

$$\ddot{W}_i(x) = \ddot{w} \left[H'_i - \frac{\ddot{\alpha}_i \ddot{\beta}_i}{\Delta_i} (x - x_i) \right].$$

Потокоцепление

$$\ddot{\Psi} = \frac{\mu_0 i \ddot{W}^2}{h} \sum_{i=1}^N \ddot{\Gamma}_i,$$

$$\begin{aligned} \text{где } \ddot{\Gamma}_i &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[H'_i - \frac{\ddot{\alpha}_i \ddot{\beta}_i}{\Delta_i} (x - x_i) \right]^2 (l_0 + 2\pi x) dx = \\ &= l_i \left(\frac{\ddot{A}_i^2}{3} \Delta_i^3 - \ddot{A}_i H'_i \Delta_i^2 + H_i'^2 \Delta_i \right) + 2\pi \left(\frac{\ddot{A}_i^2}{4} \Delta_i^4 - \frac{2\ddot{A}_i H'_i}{3} \Delta_i^3 + \frac{H_i'^2}{2} \Delta_i^2 \right), \\ \ddot{A}_i &= \frac{\ddot{\alpha}_i \ddot{\beta}_i}{\Delta_i}. \end{aligned}$$

Слой изоляции

$$\ddot{\Psi} = \frac{\mu_0 \dot{w}^2}{h} \sum_{i=1}^N \ddot{\Gamma}_i,$$

$$\text{где } \ddot{\Gamma}_i = l_i H_i'^2 \Delta_i + \pi H_i'^2 \Delta_i^2.$$

Формула индуктивности рассеяния

$$L_s = \frac{w \Psi}{i} = \frac{\mu_0 \dot{w}^2}{h} \left(\sum_{i=1}^N |\dot{\Gamma}_i| + \sum_{i=1}^N |\ddot{\Gamma}_i| + \sum_{i=1}^N |\ddot{\Gamma}_i| \right).$$

Значения интегралов на промежутках взяты со знаком модуля, так как поток магнитной индукции и, соответственно, индуктивность рассеяния, есть величина скалярная, а такой прием автоматически гарантирует один и тот же знак результата на всех промежутках.

Полученная формула будет давать верный результат, если все величины, имеющие размерность длины, будут выражены в метрах. Для единицы измерения расстояния 1 мм формула примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{4\pi}{10^7} \frac{гн}{м} = \frac{4\pi}{10^7} \frac{гн}{мм \cdot 1000} = \frac{4\pi}{10^{10}} \frac{гн}{мм}, \\ L_s &= \frac{4\pi}{10^{10}} \frac{\dot{w}^2}{h} \left(\sum_{i=1}^N |\dot{\Gamma}_i| + \sum_{i=1}^N |\ddot{\Gamma}_i| + \sum_{i=1}^N |\ddot{\Gamma}_i| \right) \quad (гн). \end{aligned}$$

Законы физики требуют, чтобы в вычислениях участвовала величина μ – магнитная проницаемость среды. В толще катушки основная часть потока рассеяния существует в пространстве, занятом медным проводом. Для меди $\mu = 1 - 1,03 \cdot 10^{-5} \approx 1$. В межслоевых и межсекционных промежутках ферромагнетиков нет и подавно. Поэтому здесь $\mu = 1$.

Формула индуктивности, приведенная Г.С. Цыкиным, содержит отсутствующий здесь параметр k_p – коэффициент рассеяния. Относительно этого коэффициента автор также имеет собственное мнение, которое представлено в разделе, посвященном геометрическим преобразованиям обмоток трансформатора.

3. Геометрия обмоток

3.1. Постановка задачи

Одним из основных положений, использованных при выводе формулы индуктивности рассеяния, было допущение о том, что во всех точках катушки обмотки имеют одинаковую толщину. Однако известно, что при намотке проводов происходит “выпучивание” обмоток. Рис. 5 показывает, как это выглядит в сечении катушки плоскостью, перпендикулярной сердечнику трансформатора. Будем считать, что сердечник трансформатора имеет прямоугольное сечение. На сторонах катушки, соответствующих большим сторонам сердечника V_2 , выпучивание больше, чем на сторонах, соответствующих меньшим сторонам сердечника V_1 . При расчете трансформатора выпучивание на стороне V_2 обычно учитывается всего лишь как фактор, ограничивающий количество витков провода, которое можно разместить в окне трансформатора. Однако увеличение площади обмоток влияет также на величину индуктивности рассеяния. Так как при выпучивании диаметр проводов не увеличивается, то прирост площади обеспечивается увеличением длины проводов и расстояний между слоями обмоток. Отсюда можно предположить, что выпучивание приводит к увеличению (или появлению) межслоевых промежутков, а сами слои обмоток разделяются на элементарные слои толщиной в один диаметр провода. Толщина таких межслоевых промежутков меняется при движении вдоль идеального витка l_0 . Рассмотренная выше математическая модель рассеяния не позволяет учесть реальное явление выпучивания. Однако если предположить, что при изменении геометрии выпученной обмотки с сохранением ее площади индуктивность рассеяния останется прежней, то реальную форму выпученных обмоток можно свести к идеальной форме катушки с обмотками – прямоугольник со скругленными углами. Идея состоит в том, чтобы найти прирост площади для каждого слоя провода, появившийся за счет расслоения обмотки, и добавить перед ним по всей длине витка равномерный по толщине межслоевой промежуток, площадь которого равна вычисленному приросту площади. Сами же провода и межслоевые промежутки после этого будем считать абсолютно мягкими и поэтому идеально прилегающими к поверхности предыдущего слоя, что будет соответствовать идеальной форме катушки с обмотками. Слоям разных обмоток должны соответствовать разные промежутки, т.к. в общем случае обмотки имеют разные коэффициенты выпучивания.

3.2. Модель выпучивания

Утолщение обмоток описано в главе XV “Обмотки трансформатора” монографии Г.С. Цыкина “Трансформаторы низкой частоты. Теория, расчет и конструирование”. В соответствии с материалом этой главы максимальная толщина каждой из обмоток прямоугольной катушки такая:

$$\dot{h} = \sum_{i=1}^{g_c} [\dot{s}_i \dot{d} + (\dot{s}_i - 1) \dot{\delta}]; \quad \text{— для невыпученной первичной обмотки;}$$

$$\ddot{h} = \sum_{j=1}^{g_k} [\ddot{s}_j \ddot{d} + (\ddot{s}_j - 1) \ddot{\delta}]; \quad \text{— для невыпученной вторичной обмотки;}$$

$$\dot{h}_g = k_1 \dot{h}; \quad \text{— для выпученной первичной обмотки;} \quad (1)$$

$$\ddot{h}_g = k_1 \ddot{h}; \quad \text{— для выпученной вторичной обмотки;} \quad (2)$$

\dot{g} – количество секций первичной обмотки;

\ddot{g} – количество секций вторичной обмотки;

\dot{s}_i – количество слоев секции i первичной обмотки;

\ddot{s}_j – количество слоев секции j вторичной обмотки;

\dot{d} – диаметр провода первичной обмотки с изоляцией;

- \ddot{d} – диаметр провода вторичной обмотки с изоляцией;
- $\dot{\delta}$ – толщина межслоевой изоляции первичной обмотки;
- δ – толщина межслоевой изоляции вторичной обмотки;

Коэффициенты выпучивания:

$1,2 \leq k_1 \leq 1,4$ – для первичной обмотки;

$1,2 \leq k_2 \leq 1,4$ – для вторичной обмотки;

1,2 – малое число слоев, (и/или) толстый провод, (и/или) $\frac{y_2}{y_1} \gg 1$;

1,4 – большое число слоев, (и/или) тонкий провод, (и/или) $\frac{y_2}{y_1} = 1$.

Минимальную общую толщину обмотки имеют в местах огибания углов катушки. Здесь наружный идеальный виток совпадает с радиусом огибающей окружности, поэтому верна формула общей толщины обмоток в случае круглой катушки:

$$h = \dot{h} + \ddot{h} + \delta (\vartheta - 1), \text{ где}$$

ϑ – полное количество секций обмоток;

δ – толщина межсекционной изоляции обмоток.

На этом знакомство с традиционной моделью заканчивается. Основные положения, извлеченные отсюда, следующие:

- высота выпучивания обмотки пропорциональна толщине непрерывной невыпученной обмотки (или любой ее части), измеренной от начала первого слоя обмотки;
- при чередовании частей обмоток общая толщина невыпученной обмотки или любой ее части, расположенной на промежутке между первым слоем этой обмотки и некоторой точкой обмотки, подсчитывается с учетом толщины межслоевой изоляции, но без учета частей другой обмотки и слоев межсекционной изоляции, расположенных на этом промежутке;
- в окрестности краев катушки обмотки изгибаются по окружности и имеют толщину, равную сумме диаметров проводов и толщины слоев изоляции.

Рассмотрим явление выпучивания более подробно. На [рис. 6](#) показаны три слоя обмотки, разделяющие их слои изоляции, имеющие одинаковую толщину по всей своей длине, а также воздушные прослойки, появляющиеся из-за выпучивания слоя провода (далее они называются областями выпучивания). Эти прослойки имеют одинаковую максимальную толщину, так как прирост толщины слоя над поверхностью катушки (в середине катушки) по определению пропорционален его толщине на краях катушки с одним и тем же коэффициентом пропорциональности.

Вероятнее всего межслоевая изоляция на самом деле не выглядит равномерным слоем, лежащим поверх слоя обмотки. Она деформируется при укладке следующего слоя обмотки и своим давлением изнутри вносит вклад в сумму сил, вызывающих выпучивание этого слоя обмотки. Однако данное исследование не ставит своей целью изучение причин, вызывающих выпучивание, поэтому изображение слоя изоляции в деформированном виде было бы не более чем ненужной подробностью. Будем считать, что межслоевая изоляция выглядит так, как показано на рисунке.

Жизненный опыт подсказывает, что если достаточно долго наматывать нитки на спичечный коробок, в итоге получится клубок шарообразной формы. Очевидно, что нити такого клубка в непосредственной близости от поверхности коробка мало отличаются от прямых линий, а на поверхности клубка превращаются в окружности. Отсюда можно предположить, что над поверхностью катушки слои обмотки представляют собой дуги окружностей с кривизной, возрастающей по мере удаления от поверхности катушки. От того, насколько верно такое представление, будет зависеть вид уравнения линии, по которой изгибается виток провода (вернее идеальный виток). Поскольку здесь не рассматриваются силы, влияющие на процесс изгибания, будем считать, что линия изгиба проводника над поверхностью катушки имеет простую форму – дугу окружности, касательную к дугам окружностей, огибающих углы катушки. Однако полной аналогии между катушкой трансформатора и клубком ниток нет. С одной сто-

роны, в начале клубка ниток расслоение нитей имеется, так как без него витки не превратились бы в окружности. Но, с другой стороны, после превращения клубка в сферу выпучивания больше нет, а момент, когда выпучивание исчезает, заметить невозможно (упругость клубка резко не меняется). Такое может быть только при условии, что коэффициент выпучивания непрерывно уменьшается по мере утолщения клубка. При намотке же провода на катушку трансформатора каждый виток добавляет на углах катушки два диаметра провода, а выпучивание не превышает 1,4. Таким образом, в традиционной модели катушка с проводом в цилиндр превратиться не может. Выход за пределы модели возможен в самом начале намотки, когда на маленькую катушку наматывается слишком толстый провод (с точки зрения практики это маловероятно). При этом точки касания L и N (рис. 7) могут не только совместиться, но и поочередно меняться местами. Ниже будет показан способ контроля такой ситуации.

Выше было выдвинуто предположение о том, что на сторонах катушки, соответствующих большим сторонам сердечника (V_2) выпучивание больше, чем на сторонах, соответствующих меньшим сторонам сердечника (V_1). Будем считать, что коэффициенты выпучивания пропорциональны длине сторон:

$$k_{V1} = 1 + (k_{V2} - 1) \frac{V_1}{V_2}, \text{ где } k_{V1} \text{ и } k_{V2} - \text{коэффициенты выпучивания безымянной обмотки, соответствующие сторонам } V_1 \text{ и } V_2.$$

вующие сторонам V_1 и V_2 .

3.3. Длина витка

На рис. 7 показана катушка и часть идеального витка (синим цветом). Над большей стороной катушки $|BC|=V$ идеальный виток изгибается по окружности с центром в точке O и радиусом $|ON|=|OG|=|OM|=R$. На углах катушки провод изгибается по окружностям с центрами в точках B и C ; L , N и M – точки касания. Радиусы малых окружностей равны невыпученной толщине обмоток: $|BN|=|CM|=h$. Расстояние от середины большой дуги витка до поверхности катушки, равно выпученной толщине обмотки: $|EG|=h_g$.

Из треугольника EOC по теореме Пифагора получаем:

$$\begin{aligned} |OC|^2 &= |OE|^2 + |EC|^2; \\ (R-h)^2 &= \left(\frac{V}{2}\right)^2 + (R-h_g)^2, \text{ откуда} \\ R &= \frac{V^2 + 4(h_g^2 - h^2)}{8(h_g - h)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Треугольники EOC и $CM\theta$ подобны, поэтому

$$\frac{|C\theta|}{|EC|} = \frac{|CM|}{|OC|}; \quad \frac{|C\theta|}{V/2} = \frac{h}{R-h}; \quad |C\theta| = \frac{Vh}{2(R-h)}.$$

Координата θ точки M касания окружностей будет такой:

$$\theta = |EC| + |C\theta| = \frac{V}{2} + \frac{Vh}{2(R-h)} = \frac{VR}{2(R-h)}. \tag{4}$$

$$\angle CM\theta = \arcsin \frac{|C\theta|}{|CM|} = \arcsin \frac{V}{2(R-h)}, \tag{5}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \angle CM\theta. \tag{6}$$

Так как $\angle NOM = \angle CM\theta \cdot 2$, то

$$\cup NGM = 2 \cdot \arcsin \frac{V}{2(R-h)} \cdot R. \quad (7)$$

Длина дуги PL находится по формулам (3) – (7) с подстановкой соответствующих значений V , h и h_g . Вместо угла α используется угол β .

$$\text{Длина дуги } LN: \quad \cup LN = \gamma \cdot h, \quad \text{где } \gamma = \frac{3\pi}{2} - (\alpha + \beta).$$

Длина витка провода определяется как длина его осевой линии:

$$l = 4 \cdot \left[\arcsin \frac{V_1}{2(R_1-h)} \cdot \left(R_1 + \frac{\Delta}{2} \right) + \arcsin \frac{V_2}{2(R_2-h)} \cdot \left(R_2 + \frac{\Delta}{2} \right) + \gamma \left(h + \frac{\Delta}{2} \right) \right],$$

где индексы 1 и 2 соответствуют своим сторонам катушки, Δ – диаметр провода.

Условие, при котором форма обмоток остается в пределах принятой модели выпучивания, следующее:

$$\gamma \leq \frac{3\pi}{2}.$$

3.4. Площадь области выпучивания

На [рис. 8](#) зеленым цветом показаны два слоя обмотки: нижний v_n и верхний v_g , а также расположенный между ними сегмент области выпучивания ABC (точнее половина сегмента, соответствующего стороне V). Межслоевая изоляция здесь отдельно не показана, так как по условию она лежит равномерным слоем на поверхности проводов, и поэтому два слоя (провод и расположенная поверх него изоляция) можно рассматривать как один слой суммарной толщины. Найдем способ вычисления площади S_{ABC} показанного сегмента выпучивания.

Нижняя поверхность слоя v_g на промежутке $[0; \theta]$ соответствует линии BC , которая изгибается по окружности радиуса R . Правее точки θ этот слой изгибается по окружности радиуса h . θ – точка касания этих окружностей. h_g – высота выпучивания данного слоя (максимальное расстояние нижней поверхности слоя от катушки в середине стороны V). Нижний слой v_n имеет аналогичные обозначения: \tilde{R} , $\tilde{\theta}$ и \tilde{h}_g . Символом $\tilde{\Delta}$ обозначена толщина слоя. Сегмент выпучивания снизу ограничен линией AC , которая на промежутке $[0; \tilde{\theta}]$ изгибается по окружности радиуса $\tilde{R} + \tilde{\Delta}$. На промежутке $[\tilde{\theta}; \theta]$ эта линия изгибается по окружности радиуса $\tilde{h} + \tilde{\Delta}$. Значение $\tilde{\theta}$ определяется по формуле:

$$\tilde{\theta} = \frac{V}{2} + \left(\tilde{\theta} - \frac{V}{2} \right) \frac{\tilde{h} + \tilde{\Delta}}{\tilde{h}}. \quad (8)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} S_{BC}(0, \theta) & \text{ – площадь между линией } BC \text{ и осью } 0x \text{ на промежутке } [0; \theta]; \\ S_{AC}(0, \tilde{\theta}) & \text{ – площадь между линией } AC \text{ и осью } 0x \text{ на промежутке } [0; \tilde{\theta}]; \\ S_{AC}(\tilde{\theta}, \theta) & \text{ – площадь между линией } AC \text{ и осью } 0x \text{ на промежутке } [\tilde{\theta}; \theta]. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда} \quad S_{ABC} = S_{BC}(0, \theta) - \left[S_{AC}(0, \tilde{\theta}) + S_{AC}(\tilde{\theta}, \theta) \right]. \quad (9)$$

Уравнение окружности, центр которой лежит на оси Oy и сдвинут вниз от оси Ox на величину b имеет вид: $x^2 + (y + b)^2 = R^2$. Для значений выше оси Ox : $y = \sqrt{R^2 - x^2} - b$. Площадь под дугой окружности радиуса R на промежутке $[0; T]$:

$$S(T, R, b) = \int_0^T (\sqrt{R^2 - x^2} - b) dx = \frac{T}{2} \sqrt{R^2 - T^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{T}{R} - bT. \quad (10)$$

Отсюда:

$$S_{BC}(0, \theta) = S(\theta, R, R - h_e); \quad (11)$$

$$S_{AC}(0, \tilde{\theta}) = S(\tilde{\theta}, \tilde{R} + \tilde{\Delta}, \tilde{R} - \tilde{h}_e). \quad (12)$$

Уравнение окружности, центр которой лежит на оси Ox и сдвинут вправо от начала координат на величину a , имеет вид: $(x - a)^2 + y^2 = R^2$. Для значений выше оси Ox : $y = \sqrt{R^2 - (x - a)^2}$. Площадь под дугой на промежутке $[T_1; T_2]$:

$$\begin{aligned} S(T_1, T_2, R, a) &= \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{R^2 - (x - a)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[(T_2 - a) \sqrt{R^2 - (T_2 - a)^2} - (T_1 - a) \sqrt{R^2 - (T_1 - a)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + R^2 \left[\arcsin \frac{T_2 - a}{R} - \arcsin \frac{T_1 - a}{R} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда:

$$S_{AC}(\tilde{\theta}, \theta) = S\left(\tilde{\theta}, \theta, \tilde{h} + \tilde{\Delta}, \frac{V}{2}\right); \quad (14)$$

Итак, площадь показанного сегмента выпучивания вычисляется по формулам (8) – (14). Полная площадь сегментов выпучивания одного слоя равна

$$S_{\text{вып}} = 4(S_{ABC}^{V_1} + 4S_{ABC}^{V_2}).$$

При вычислении членов правой части нужно использовать комплекты исходных параметров для соответствующих сторон катушки.

3.5. Спрявление обмоток

Найдем толщину дополнительного слоя изоляции, при которой он будет иметь площадь поперек линий потока рассеяния такую же, что и все четыре сегмента выпучивания под данным слоем обмотки. Как показано в разделе [Математическая модель потока рассеяния](#),

$$l(x) = l_0 + 2\pi x \quad - \text{длина идеального витка катушки};$$

$S(x) = \pi \Delta^2 + l(x) \Delta$ – площадь слоя, ограниченного снизу идеальным витком, проходящим через точку, удаленную от катушки на расстояние x и имеющего толщину Δ .

Если известны значения l и S , то из квадратного уравнения $\pi \Delta^2 + l \Delta - S = 0$ получаем:

$$\Delta^* = \frac{-l + \sqrt{l^2 + 4\pi S}}{2\pi} \quad - \text{искомая толщина слоя.}$$

3.6. Коэффициент рассеяния

Формулы (1) и (2) дают толщину выпученных обмоток. Эта толщина относится не только к некоторой части обмотки, а ко всей обмотке. Отсюда можно предположить, что предложенные Г.С. Цыкиным значения для выбора коэффициента рассеяния отчасти продиктованы необходимостью скомпенсировать завышенную толщину обмоток, и при расчете индуктивности рассеяния полагать $k_p = 1$.

Таблица XV.4

Тип и расположение обмоток	k_p
Слоевая нечередующаяся конструкция обмоток	0,8÷0,9
Дисковая нечередующаяся конструкция обмоток	0,7÷0,8
Слоевая и дисковая чередующаяся конструкция обмоток	0,9÷1,0

Меньшие из указанных значений получаются в трансформаторах с большими рабочими напряжениями, где имеются большие изоляционные зазоры между обмоткой и сердечником, а также при малом количестве чередующихся секций.

4. Приложения

4.1. Конструктивные варианты обмоток

Принадлежность трансформатора к тому или иному конструктивному варианту здесь определяется его следующими свойствами:

- одноконтный или двухконтный (двухконтный – если хотя бы одна из обмоток имеет среднюю точку);
- тип сердечника (броневой или стержневой);
- способ соединения обмоток или их половинок (последовательно или параллельно).

На рисунках показаны все возможные одноконтные и двухконтные конструктивные варианты. В них продемонстрирован принцип разбиения обмоток на несколько концентрических секций с целью уменьшения индуктивности рассеяния, а также принцип достижения максимально возможной симметрии обмоток за счет разного направления намотки разных секций. Примеры ДБ5.4 и ДС5.4 показывают, что принцип полной симметрии обмоток противоречит принципу разбиения обмоток на общее нечетное количество концентрических секций.

Между Г.С. Цыкиным и Г.В. Войшвилло имеются расхождения относительно способа соединения половинок двухконтных обмоток, намотанных в разные стороны (для образования средней точки). Цыкин рекомендует соединять между собой начала половинок первичной обмотки; Войшвилло предлагает у таких же половинок соединять их концы. У половинок вторичной обмотки Войшвилло рекомендует соединять их начала; Цыкин разрешает соединять между собой как начала, так и концы половинок. Приведенные здесь примеры построены в стиле рекомендаций Г.В. Войшвилло.

Изображенные на рисунках схемы соединения секций следует рассматривать исключительно как примеры. Программа Tube TransCalc не ограничивает число концентрических секций, а также схемы их соединения и расположения этими примерами.

Рассмотрим принципы, положенные в основу расчета показателей обмоток. Основой для расчетов служит таблица слоев, в которой задается расположение слоев обмоток, количество витков в каждом слое, а также их соединение – параллельное или последовательное. Направление намотки слоев полагается одинаковым. Таблица слоев соответствует единственной цилиндрической секции трансформатора А/І с броневым сердечником или одной цилиндрической секции для остальных конструктивных вариантов. Таким образом, таблица слоев описывает одну цилиндрическую секцию трансформатора, у которого все концентрические секции одной и той же половинки обмотки расположены в одной цилиндрической секции. В примерах двухконтных обмоток такие секции соответствуют рисункам с индексом “1”: ДБ1.1, ДС1.1, ДБ2.1, ДС2.1, и т.д. Выводы относительно числа витков обмоток, их сопротивлений, индуктивности первичной обмотки и индуктивности рассеяния трансформатора делаются на основе расчетов этих величин по одной цилиндрической секции. Перекрестное расположение концентрических секций обмоток в разных цилиндрических секциях реального трансформатора и их намотка в разных направлениях на результат расчета не влияют и программой не контролируются – эти проблемы конструирования решаются пользователем по своему усмотрению.

4.2. Соединение слоев внутри цилиндрической секции

Конструктивные варианты обмоток дают возможность соединения половинок обмоток всеми возможными способами. Однако, для достижения нужной индуктивности рассеяния или симметрии частей обмоток, могут потребоваться более изощренные приемы. Например, вторичная обмотка выходного трансформатора, работающего на низкоомную нагрузку (акустическая система), при достаточно большом сердечнике может уложиться в один слой. В таком случае для обеспечения чередования секций обмоток можно между секциями (или слоями) первичной обмотки разместить слои вторичной обмотки и соединить их параллельно.

Чтобы построить модель обмотки с указанными требованиями, желательно иметь средства параллельного и (или) последовательного соединения частей обмотки внутри цилиндрической секции. Произвольное параллельно-последовательное соединение слоев обмотки вряд ли приведет к положительному результату, так как при этом разные части одной и той же обмотки внутри цилиндрической секции могут иметь разное сопротивление. Это, по крайней мере, не облегчит в двухтактном трансформаторе укладку секций половинок одной обмотки симметрично относительно среднего витка катушки.

С учетом вышеизложенного, приложение Tube TransCalc предоставляет следующие варианты соединения частей обмотки:



a) простая обмотка (все слои соединены последовательно);



b) последовательно соединенные группы, состоящие из одинакового числа параллельно соединенных слоев;



c) параллельно соединенные группы, состоящие из одинакового числа последовательно соединенных слоев.

Имеются ограничения по применению этих вариантов:

- Если слои одной обмотки соединены способом b) или c) (сложная обмотка), то слои другой обмотки могут быть соединены только способом a) (простая обмотка).
- В простой обмотке слои могут иметь разное количество витков. В сложной обмотке число витков во всех ее слоях должно быть одинаковым.

Обозначим:

W – количество физических витков обмотки в одной цилиндрической секции;

w – количество витков обмотки в одной цилиндрической секции, учитываемых при создании индукции;

P – количество групп сложной обмотки;

Q – количество слоев в одной группе сложной обмотки.

Тогда число витков, создающих индукцию, для разных обмоток будет таким:

$w = W$ – для простой обмотки;

$w = \frac{W}{Q}$ – для последовательно соединенных групп;

$w = \frac{W}{P}$ – для параллельно соединенных групп.

4.3. Рисунки

Рисунок 1

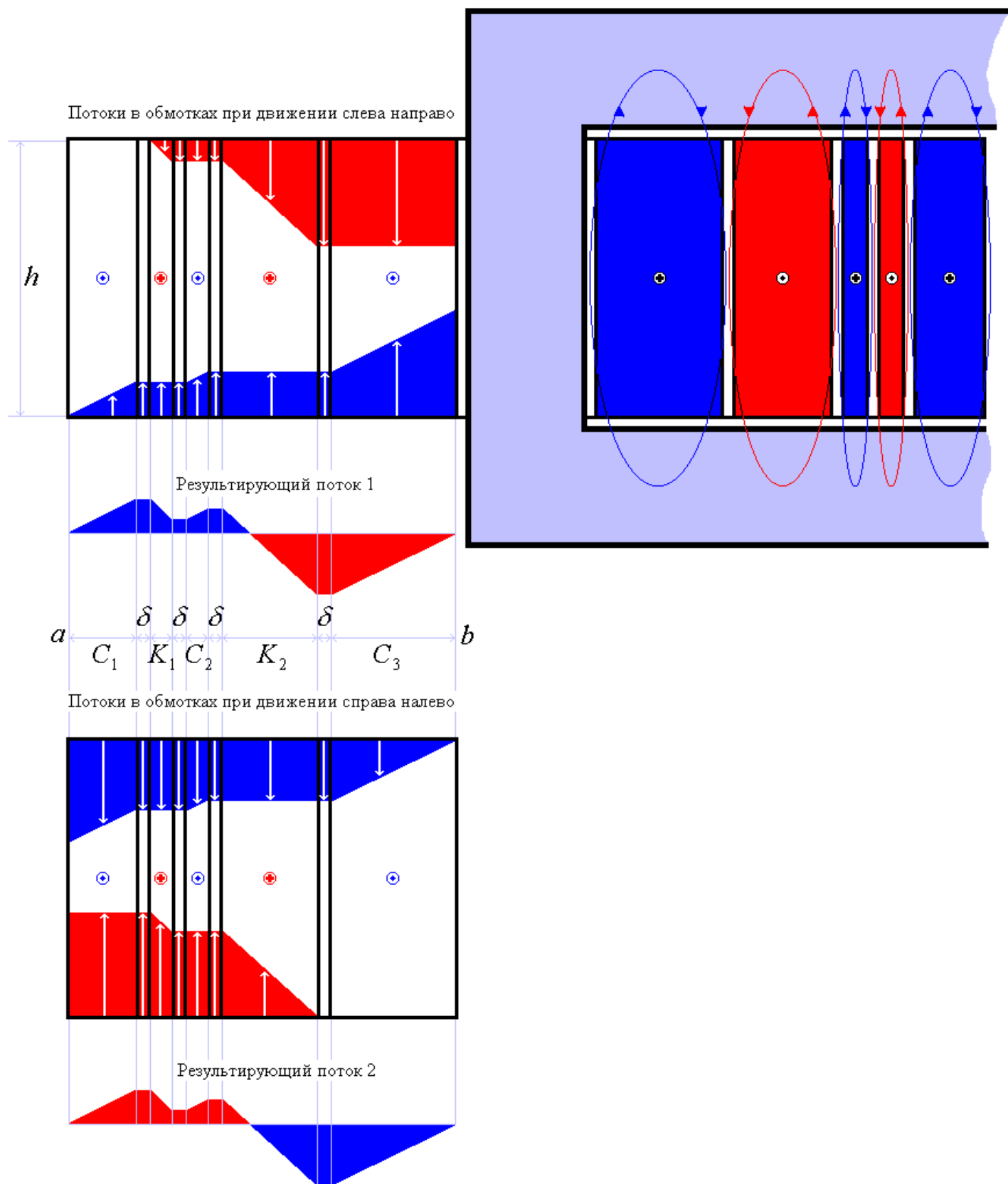


Рисунок 2

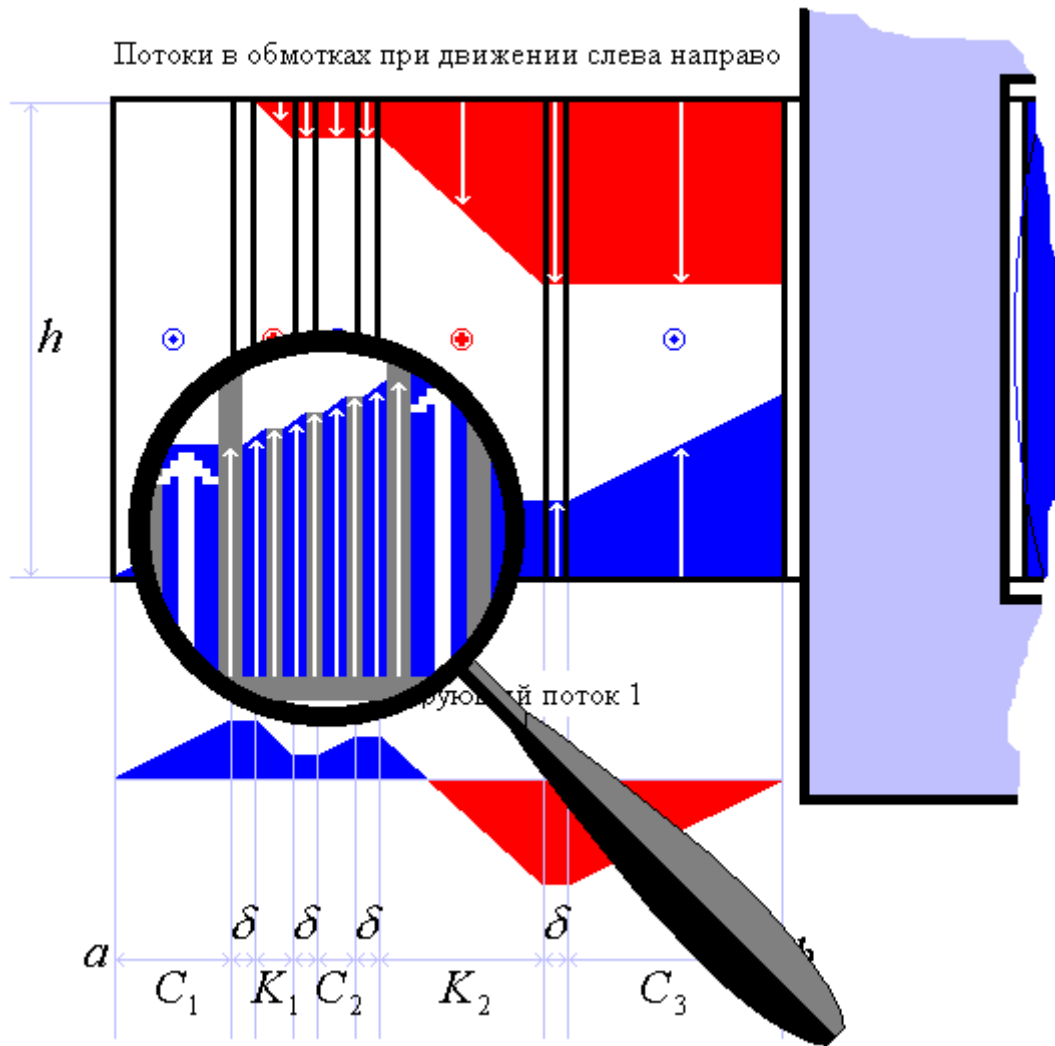


Рисунок 3

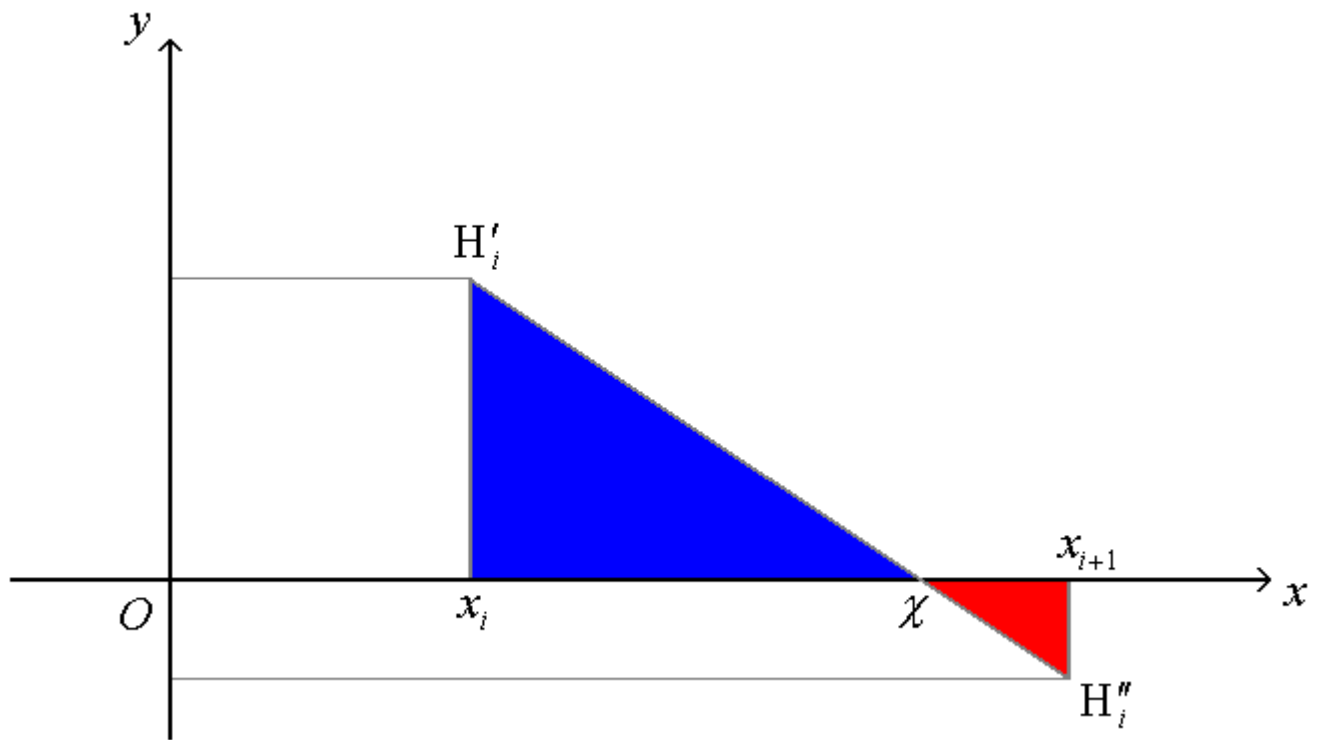


Рисунок 4

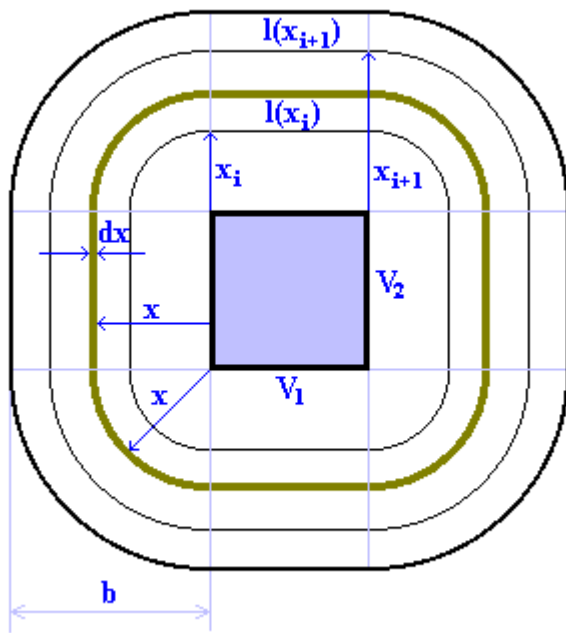


Рисунок 5

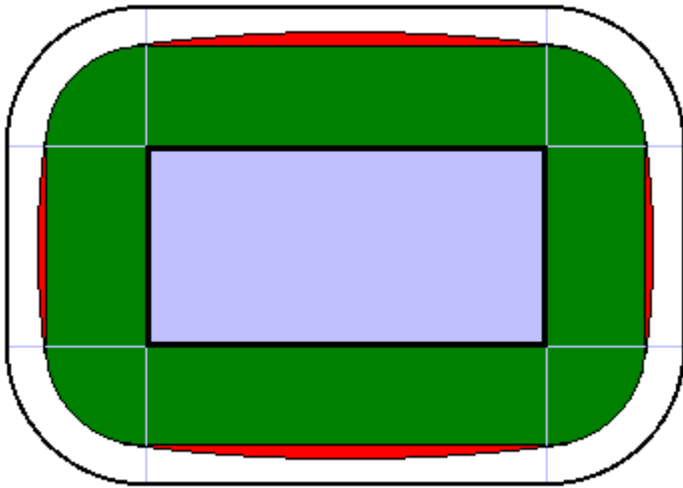


Рисунок 6



Легенда:



Слой обмотки

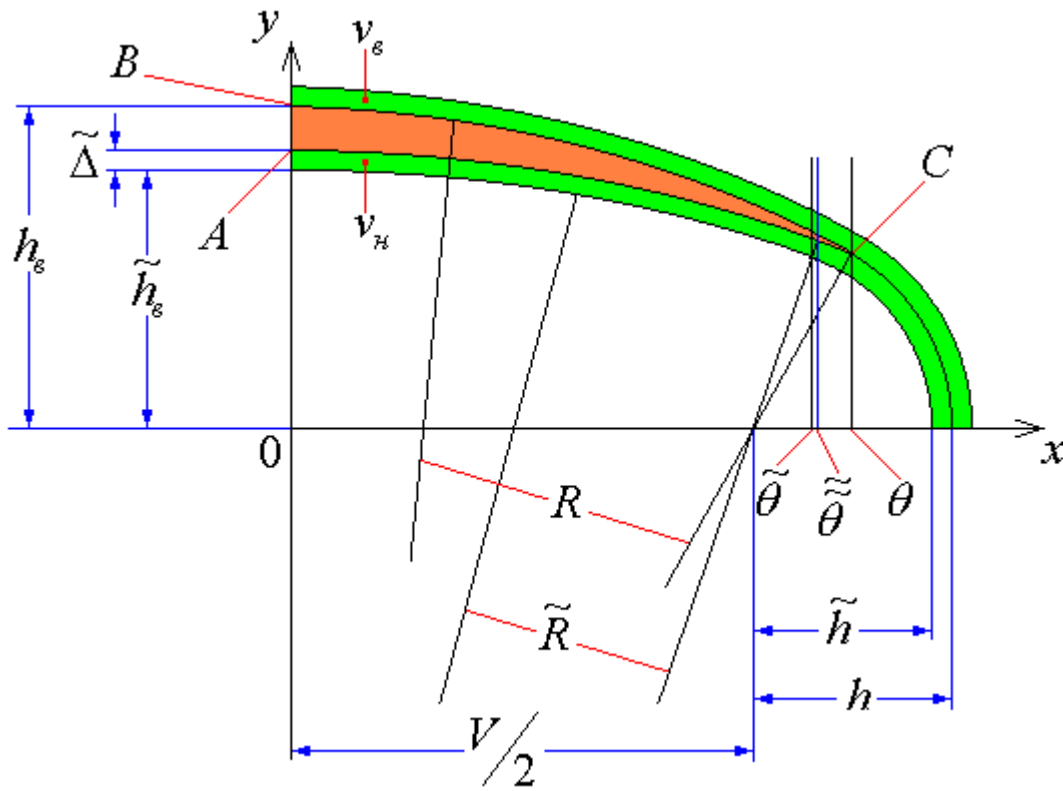


Межслоевая изоляция (бумага, лакоткань, и т.д.)

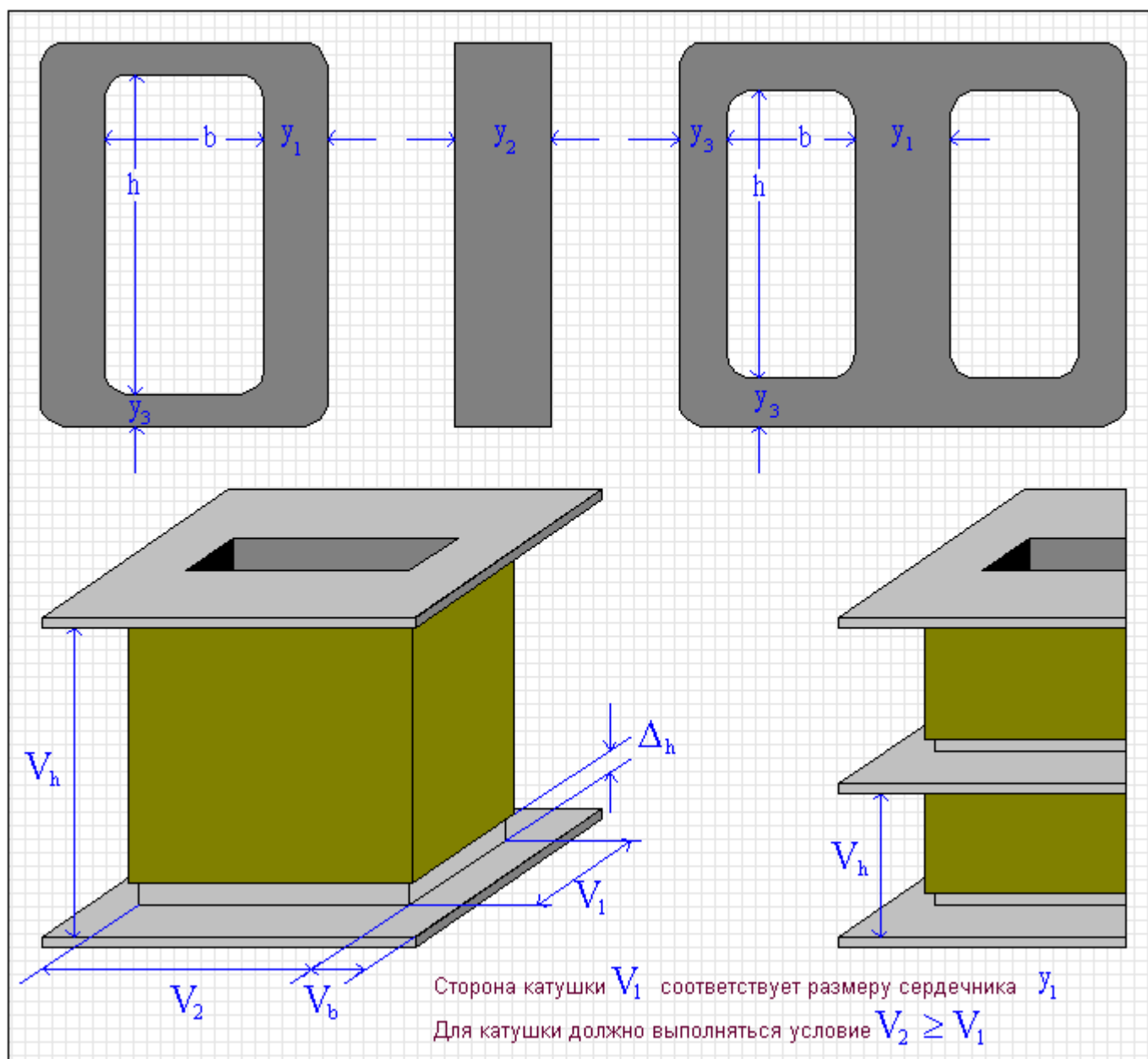


Воздушная прослойка, образовавшаяся из-за выпучивания слоя обмотки


Рисунок 8



Катушка



■ Первичная обмотка
■ Вторичная обмотка

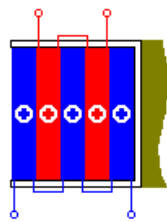
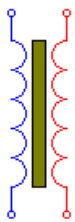
 Направления намотки проводов в секциях

Однотактные конструктивные варианты

Схема соединения обмоток

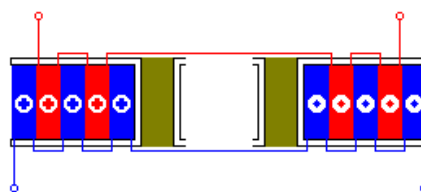
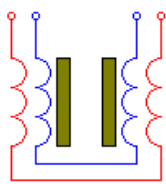
Схема соединения секций

Броневой сердечник

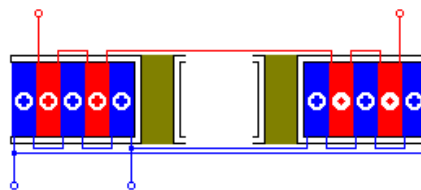
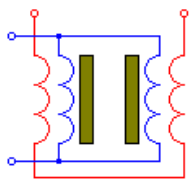


ОБ1

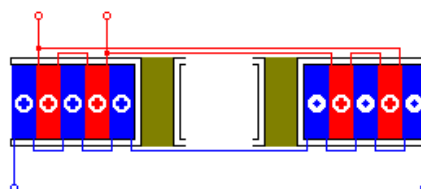
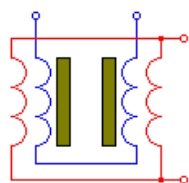
Стержневой сердечник



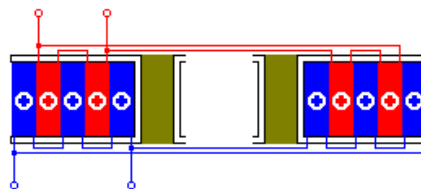
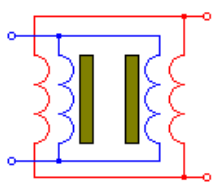
ОС1



ОС2



ОС3



ОС4

Двухтактные конструктивные варианты

■ Первичная обмотка

■ Вторичная обмотка

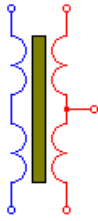


Направления намотки проводов в секциях

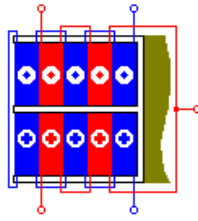
Схема соединения обмоток

Схема соединения секций

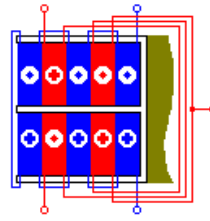
Броневой сердечник



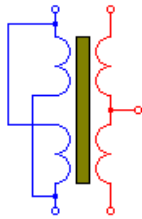
ДБ1



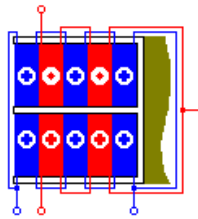
1



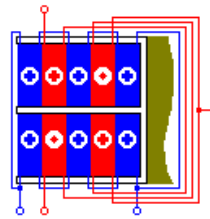
2



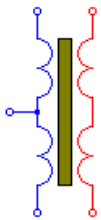
ДБ2



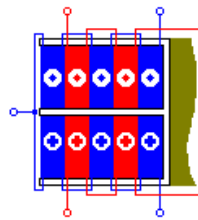
1



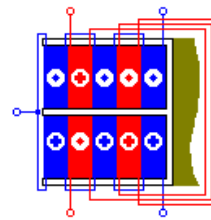
2



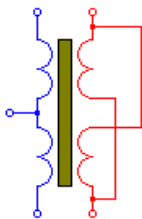
ДБ3



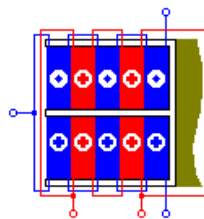
1



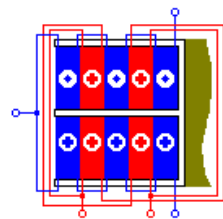
2



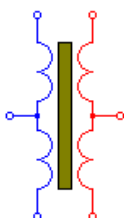
ДБ4



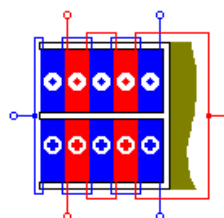
1



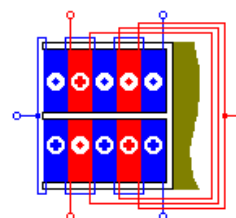
2



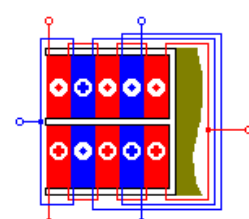
ДБ5



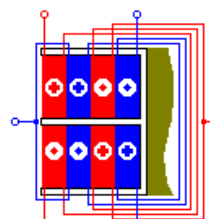
1



2



3



4

Двухтактные конструктивные варианты (продолжение)

■ Первичная обмотка
■ Вторичная обмотка


 Направления намотки проводов в секциях

Схема соединения обмоток

Схема соединения секций

Стержневой сердечник

